• $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[e^x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right] = e^x$

Conclusion: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right] = e^x$.

5) a- •Pour $n \geq 2$; on a $(n-1) \in \mathbb{N}^*$; donc d'après **3)** ona:

$$\frac{1^n}{n}e^{-1} \leq F_{n-1}(1) \leq \frac{1^n}{n} \Rightarrow \frac{1}{n}e^{-1} \leq (n-1)!\left[1-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}e^{-1}\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n!}e^{-1} \leq 1 - e^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n!} \leq e - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n!} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!} \leq e \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq e$$

• Pour $n = 1$. $\sum_{k=0}^{1}\frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} = 2 \leq e$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*; \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq e$ (1)

$\bigstar \forall n > 1; F_n(1) \leq \frac{1^{n+1}}{n+1} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; n!\left[1 - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}e^{-1}\right] \leq \frac{1}{n+1}$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; 1 - e^{-1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; e \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \frac{e}{(n+1)!}$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; e \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!}\left(\frac{e-(n+1)}{n+1}\right)$$

Or $n \geq 2 \Leftrightarrow n+1 \geq 3 \Leftrightarrow e-(n+1) \leq e-3 < 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{n!}\left(\frac{e-(n+1)}{n+1}\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!}\left(\frac{e-(n+1)}{n+1}\right) < \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}$$

D'où $e \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}$

$\bigstar$ Pour $n = 1$. $\sum_{k=0}^{1}\frac{1}{k!} + \frac{1}{1!} = 3 > e$

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}^*; e \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}$ (2)

Ainsi: (1) et (2) donnent $\forall n \in \mathbb{N}^*; \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq e \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}$.

b- D'après la question précédente

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq e \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} \Leftrightarrow 0 \leq e - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{n!}$$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ est une valeur approchée de e à $\frac{1}{n!}$ près.

Comme $\frac{1}{5!} = \frac{1}{120} < 10^{-2}$ alors $\sum_{k=0}^{5}\frac{1}{k!} \leq e \leq \sum_{k=0}^{5}\frac{1}{k!} + \frac{1}{5!}$

est un encadrement d'amplitude inferieur ou égal à $\frac{1}{120} < 10^{-2}$.

$\star \sum_{k=0}^{5}\frac{1}{k!} = \frac{163}{60} = 2,7167$ $\star \sum_{k=0}^{5}\frac{1}{k!} + \frac{1}{5!} = \frac{109}{40} = 2,725$

Enfin: $2,7167 < e < 2,725$ est un encadrement d'amplitude $0,0083 < 10^{-2}$